

УДК 519.68

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СУХИХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УПЛОТНЕНИЙ

*Р.З. Даутов, М.М. Карчевский, Е.А. Новиков,
Е.М. Федотов, В.К. Хайсанов*

Аннотация

Построена квазитрёхмерная термоупругогазодинамическая модель сухих газодинамических уплотнений. Предложен способ ее дискретизации на основе метода конечных элементов. Построен эффективный итерационный метод решения соответствующей конечномерной нелинейной задачи. Приведены результаты параметрических расчетов, иллюстрирующие возможности разработанного авторами программного комплекса.

Ключевые слова: газодинамические уплотнения, математическая модель, метод конечных элементов, итерационные методы.

Введение

На сегодняшний день наилучшим техническим решением для предотвращения протечек газа из корпуса сжатия центробежного компрессора в окружающую среду является применение систем сухих газодинамических уплотнений (СГУ). Благодаря неоспоримым преимуществам СГУ над ранее применяемыми масляными уплотнениями корпуса сжатия комплектация вновь проектируемых и выпускаемых компрессоров системами СГУ доходит до 95% от общего объёма выпуска. Массовое использование СГУ стало возможным благодаря повышению их надёжности, что связано с успехами в материаловедении и технологии, которые позволили изготавливать кольца газодинамической пары с высокой точностью. Это обстоятельство позволило уменьшить расчётные рабочие зазоры между газодинамическими кольцами до 1–2 мкм, что, в свою очередь, существенно снизило безвозвратные потери перекачиваемого компрессором газа, которые составляют первичную утечку через уплотнительный зазор и с помощью вспомогательных систем сжигаются на факельном хозяйстве технологической установки. Повышение привлекательности применения СГУ, с одной стороны, предъявляет и повышенные требования к точности математического моделирования уплотнений, с другой стороны, в частности, становится необходимым расчёт термоупругих деформаций колец, от которых зависит форма уплотнительного зазора, в конечном счёте определяющая работоспособность уплотнения.

В настоящей работе предлагается новая «квазитрёхмерная» термоупругогазодинамическая модель СГУ с учетом термоупругих деформаций уплотнительных колец (см., например, [1–3]), способ ее дискретизации на основе метода конечных элементов и эффективный итерационный алгоритм численной реализации возникающей конечномерной нелинейной задачи.

Приведены некоторые численные результаты, иллюстрирующие возможности разработанного авторами программного комплекса, позволяющего определять основные характеристики газодинамических уплотнений как на этапе проектирования новых, так и при анализе существующих устройств.

1. Постановка задачи. Математическая модель

Принцип работы СГУ в соответствии с расчётной схемой колец газодинамической пары представленной, на рис. 1, заключается в следующем: аксиально-подвижное кольцо **б** совместно с вращающимся кольцом **а** образуют торцовую уплотнительную щель, разделяющую область высокого (уплотняемого) P_0 и низкого P_2 давлений. На кольце **а** выполнены спиральные канавки угловой протяжённости η_1 , которые при вращении ротора захватывают газ из полости с давлением P_0 и перемещают его вдоль осей канавок к центру. При этом давление в газовом слое повышается до некоторого наибольшего значения, далее давление постепенно снижается по направлению к центру вследствие утечки газа через торцовую щель, достигая давления за уплотнением, равного P_2 .

Характерный зазор между вращающимся и аксиально-подвижными кольцами составляет 1–5 мкм, что сопоставимо с глубиной газодинамических канавок, диаметры колец до 300 мм. В связи с этим для описания распределения давления в газовом слое оправдано применение известного приближения тонкого слоя [4], уравнения Рейнольдса, которое с учетом сжимаемости газа в полярных координатах в безразмерной форме записывается в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r \rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = -6\omega \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho h). \quad (1)$$

Уравнение рассматривается в области Ω , представляющей собой ячейку периодичности (см. рис. 1), $\Omega_0 \subset \Omega$ – часть области, занятая канавками на вращающемся кольце. Уравнение (1) дополняется граничными условиями

$$p(R_1, \theta) = P_0, \quad p(R_2, \theta) = P_2; \quad (2)$$

предполагается также выполненным условие периодичности функции p по переменной θ .

Поясним смысл входящих в уравнение величин: p – давление газа в зазоре; $P_0 = \text{const}$ – давление газа на входе в уплотнение; $P_2 = \text{const}$ – давление внешней среды (атмосферное), P_0 обычно существенно больше P_2 ; h – толщина зазора, определяемая соотношением $h = h(r, \theta) = H + h_1(r, \theta) + h_2(r, \theta)$, здесь H – рабочая толщина зазора, $h_1(r, \theta)$ равна глубине канавки в Ω_0 и равна нулю вне Ω_0 , $h_2(r, \theta)$ определяется (ниже) по осевому движению колец за счет силовых и температурных воздействий; $\rho = p/R_g T$ – плотность газа; $T = T(r, \theta)$ – температура газа, R_g – газовая постоянная; $\mu = \mu_0(T/T_0)^{n_k}$ – вязкость газа, μ_0 – вязкость газа перед уплотнением, T_0 – температура газа перед уплотнением, n_k – заданная постоянная; ω – угловая скорость вращения диска.

Распределение температуры в зазоре между дисками мы описываем уравнением энергии

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + h^{-1} \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z_2} \Big|_{z_2=0} + h^{-1} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z_1} \Big|_{z_1=0} + w = \\ = \rho c_p \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right), \quad (r, \theta) \in \Omega, \quad (3) \end{aligned}$$

где

$$v_r = -\frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad v_\theta = -\frac{h^2}{12\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{\omega r}{2},$$

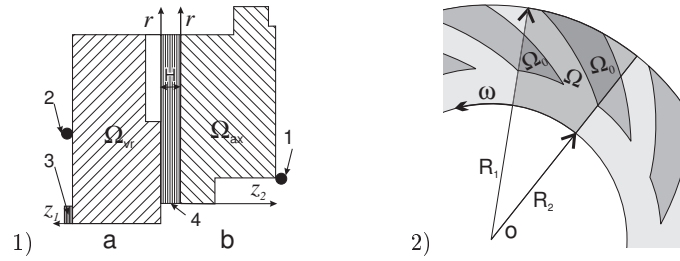


Рис. 1. 1) схема уплотнения: **a** – вращающееся кольцо, **b** – аксиально-подвижное кольцо, 1, 2 – уплотнительные резиновые кольца, 3 – выступ обоймы, 4 – смазочный слой; 2) вращающееся кольцо. Ω – ячейка периодичности

$$w = \frac{\mu\omega^2 r^2}{h^2} + \frac{h^2}{12\mu} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{r\partial\theta} \right)^2 \right] + T\mathbf{v} \cdot \nabla \frac{p}{T}$$

есть составляющие средней по величине зазора скорости \mathbf{v} движения газа, w – функция, учитывающая тепловыделение за счет как вязкого трения, так и изменения удельного объема; $\nabla = (\partial/\partial r, \partial/r\partial\theta)$; точкой обозначено скалярное произведение двумерных векторов; $T = T(r, \theta)$ – средняя по величине зазора температура газа; T_2, T_1 – температуры вращающегося и аксиально-подвижного колец соответственно; $\lambda_k \partial T_k / \partial z_k|_{z_k=0}$, $k = 1, 2$, – потоки тепла во вращающееся и аксиально-подвижное кольцо соответственно; $\lambda = \lambda(r, \theta) = \lambda_0(T/T_0)^{n_k}$ – коэффициент теплопроводности газа, $\lambda_0 = \text{const}$ – коэффициент теплопроводности газа перед уплотнением, λ_1, λ_2 – коэффициенты теплопроводности материалов соответствующих колец.

При этом полагается выполненным условие периодичности по θ и условие

$$T = T_0, \quad r = R_1, \quad \text{если } v_r < 0. \quad (4)$$

Распределение температуры в кольцах описывается двумерным уравнением теплопроводности твердого тела в переменных r, z . На границе кольца и газового слоя температура есть функция переменных r, θ и полагается равной температуре газа.

На границах соприкосновения колец с омывающим газом Γ_{vr}, Γ_{ax} вне пределов смазочного слоя ставятся линейные граничные условия третьего рода с коэффициентами теплоотдачи α_1, α_2 соответственно, моделирующие теплообмен по закону Ньютона со средой, имеющей заданную температуру T_0 .

Деформации колец, вызванные их нагревом, силовыми воздействиями со стороны газовой среды и за счет вращения, принимаются осесимметричными и описываются уравнениями линейной термоупругости. Упругие характеристики материала колец (модуль Юнга и коэффициент Пуассона), а также коэффициенты линейного расширения предполагаются известными.

На границе газового слоя давление, действующее на кольцо, принимается равным усредненному по угловой переменной давлению, определяемому из уравнения Рейнольдса. Вне смазочного слоя давление на кольцо полагается равным давлению омывающего газа. При этом в точках границы, лежащих выше уплотнительных резиновых колец (см. рис. 1), давление равно давлению на входе в уплотнение, в точках, лежащих ниже уплотнительных резиновых колец, давление равно атмосферному. Таким образом ставятся граничные условия всюду, кроме того участка границы вращающегося кольца, который опирается на выступ обоймы (см. рис. 1). На этом участке границы осевая составляющая перемещения принимается равной нулю.

Полученная система уравнений замыкается условием равновесия аксиально подвижного кольца, то есть условием равенства нулю осевой составляющей главного вектора внешних сил, приложенных к границе кольца. Фактически, именно это условие служит для определения рабочей величины смазочного слоя при заданном режиме работы уплотнения.

2. Численный метод

В целом предлагаемый метод состоит из нескольких шагов. В основе лежит определение полей температур, давлений и деформаций пар трения. Прежде всего, исходные дифференциальные уравнения аппроксимируются сеточными на основе метода конечных элементов с численным интегрированием.

Для вычисления давления в смазочном слое аппроксимируется уравнение Рейнольдса (1) с граничными условиями (2). При этом используются четырехугольные билинейные конечные элементы на ячейках, представляющих собой разбиение области Ω на четырехугольники, соответствующие противоположные пары сторон которых параллельны оси θ . Геометрия ячеек согласуется при этом с границей канавки Ω_0 . Решение уравнения Рейнольдса осуществляется с использованием двухслойного итерационного метода с сеточным предобуславливающим оператором второго порядка, эквивалентным старшей части дифференциального оператора в уравнении Рейнольдса.

Опишем способ вычисления температуры в смазочном слое и уплотнительных кольцах Ω_{vr} , Ω_{ax} . В ячейке периодичности Ω смазочного слоя вводится прямоугольная сетка

$$\omega_{r,\theta} = \omega_r \times \omega_\theta, \quad \omega_r = \{r_j, j = 0, 1, \dots, N_r\}, \quad \omega_\theta = \{\theta_j, j = 0, 1, \dots, N_\theta\}.$$

Важным элементом численного решения уравнения энергии является построение оператора C_h , позволяющего вычислять сеточные потоки тепла в уплотняющие кольца при заданной температуре t_h в смазочном слое. Для этого используется вариант метода окаймления [5] решения систем линейных алгебраических уравнений.

В областях Ω_{vr} и Ω_{ax} строится триангуляция, согласованная на их границах Γ_p , примыкающих к смазочному слою, с сеткой $\omega_{r,\theta}$. Пусть V_h – пространство непрерывных в Ω_{vr} и Ω_{ax} функций линейных на элементах триангуляции,

$$\begin{aligned} a(u, \eta) &= \int_{\Omega_{vr}} \lambda_1 \nabla u \cdot \nabla \eta \, dx + \int_{\Omega_{ax}} \lambda_2 \nabla u \cdot \nabla \eta \, dx + \int_{\Gamma_{vr}} \alpha_1 u \eta \, dx + \int_{\Gamma_{ax}} \alpha_2 u \eta \, dx, \\ b(u, \eta) &= \int_{\Gamma_{vr}} \alpha_1 \eta \eta \, dx + \int_{\Gamma_{ax}} \alpha_2 u \eta \, dx. \end{aligned}$$

Последовательно вычисляются решения $u_{h,i}$ конечноэлементных схем

$$a(u_{h,i}, v_h) = 0, \quad u_{h,i}, v_h \in V_h, \quad u_{h,i}|_{(r_j,0)} = \delta_{i,j}, \quad j = 1, 2, \dots, N_r \quad (5)$$

для $i = 1, 2, \dots, N_r$, где $\delta_{i,j}$ – символ Кронеккера, а также решение схемы

$$a(u_{h,T}, v_h) = b(T_0, v_h), \quad u_{h,T}, v_h \in V_h, \quad u_{h,T}|_{\Gamma_p} = 0, \quad (6)$$

а затем находятся компоненты матрицы C_h и вектора φ по формулам

$$\begin{aligned} c_{h,j,i} &= a(u_{h,i}, \phi_j) / \int_{\Gamma_p} \phi_j \, dx, \quad i = 1, 2, \dots, N_r, \\ \varphi_j &= a(u_{h,T}, \phi_j) / \int_{\Gamma_p} \phi_j \, dx, \quad j = 1, 2, \dots, N_r, \end{aligned} \quad (7)$$

где ϕ_j – базисная функция Лагранжа, соответствующая узлу триангуляции с координатами $(r_j, 0)$.

В результате вычисления сеточных суммарных тепловых потоков в уплотнительные кольца при заданной температуре t_h в смазочном слое сводится к вычислению вектора

$$\psi_h = C_h t_h + \varphi.$$

Для нахождения приближённого решения T_h уравнения энергии (3) с граничным условием (4) используется вариант двухкомпонентного итерационного метода. Идея использования таких методов для решения уравнений в частных производных изложена в работе [6], видоизменения таких схем для решения нелинейных нестационарных задач были предложены и исследованы в [7, 8]. Метод заключается в последовательном решении уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{T_{h,1}^{k+1} - \tilde{T}_h^k}{\tau} + \sigma(A_r^{(k)} + C_h)(T_{h,1}^{k+1} - T_{h,1}^k) + \\ \quad + (A_r^{(k)} + C_h)T_{h,1}^k + A_\theta^{(k)}T_{h,2}^k + \varphi = w_h, \\ \frac{T_{h,2}^{k+1} - \tilde{T}_h^k}{\tau} + \sigma A_\theta^{(k+1)}(T_{h,2}^{k+1} - T_{h,2}^k) + \\ \quad + (A_r^{(k)} + C_h)T_{h,1}^k + A_\theta^{(k)}T_{h,2}^k + \varphi = w_h, \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Здесь $T_{h,1}^k, T_{h,2}^k$ – итерационные приближения к T_h , $\tilde{T}_h^k = (T_{h,1}^k + T_{h,2}^k)/2$; w_h^k – сеточная аппроксимация диссипативной функции; τ, σ – итерационные параметры метода; $A_r^{(k)}, A_\theta^{(k)}$ – сеточные операторы, аппроксимирующие составляющие пространственного оператора уравнения энергии, содержащие соответственно производные по переменным r и θ , составляющие которых, отвечающие за перенос тепла за счёт вращения диска, аппроксимируются направленными против потока разностными отношениями; коэффициенты сеточных операторов вычисляются на функциях $T_{h,2}^k, T_{h,1}^{k+1}$ соответственно.

Заметим, что вычисление матрицы (ёмкости) C_h и вектора φ по формулам (5)–(7) требуется проводить лишь однажды, что позволяет существенно сократить время вычислений квазитрёхмерной системы дифференциальных уравнений.

Для нахождения итерационных компонент сеточной температуры используются прямые (типа Гаусса) методы решения систем линейных алгебраических уравнений. При выполнении неравенства $\|\tilde{T}_h^{k+1} - \tilde{T}_h^k\| \leq \varepsilon$, где ε – заданное положительное число, определяющее точность расчетов, значение \tilde{T}_h^{k+1} принимается за приближённое сеточное решение уравнения энергии в смазочном слое.

Для совокупного отыскания полей температур в смазочном слое и уплотнительных кольцах, а также давления в смазочном слое строится внешний итерационный процесс, в котором последовательно решаются уравнения Рейнольдса, теплопроводности и энергии, а также пересчитывается диссипативная функция w_h , вычисляется несущая способность смазочного слоя. Эта процедура применяется на каждом шаге процесса отыскания равновесного положения аксиально подвижного кольца. При этом последовательно уточняется величина рабочего зазора H , обеспечивающего равновесие системы без учёта деформаций уплотнительных колец.

После предварительного отыскания рабочего зазора производится учет термоупругих деформаций колец уплотнения. Тем самым фактически уточняются форма и величина зазора уплотнения.

Для определения поля упругих смещений колец используются (геометрически) те же конечные элементы в областях Ω_{vr}, Ω_{ax} колец, что и при построении схемы

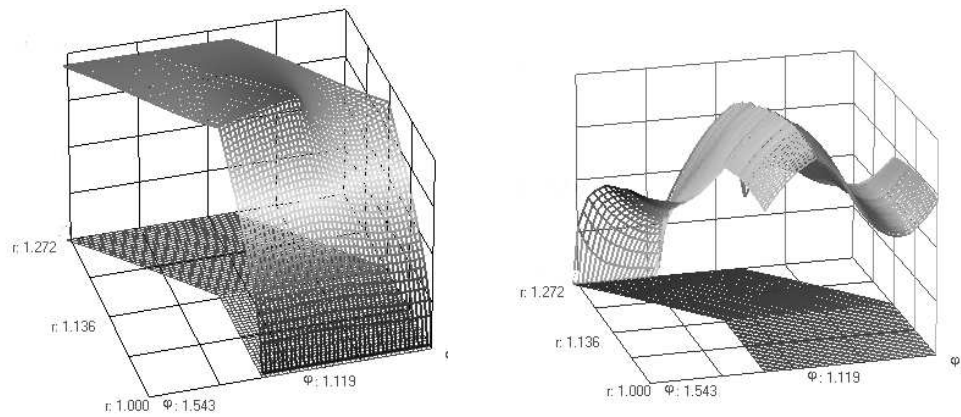


Рис. 2. Характерные графики полей давления (слева) и температуры (справа) в смазочном слое

для решения уравнения теплопроводности. Заметим, что задача определения смещений во вращающемся диске при известном давлении является корректной. Однако система уравнений, описывающая деформации аксиально-подвижного кольца, сопровождается лишь граничными условиями второго рода, и поэтому имеет неединственное решение (оно определяется с точностью до постоянного смещения в осевом направлении). Для построения решения задачи о равновесии системы с учетом деформации колец используется следующий итерационный метод. На каждом шаге метода по известным полям перемещений в кольцах вычисляются зазор, поля температур и давлений в смазочном слое, а также температура колец уплотнения. При этом применяются описанные выше алгоритмы. Затем пересчитываются поля деформаций. С этой целью решается система уравнений теории упругости во вращающемся кольце, а после этого определяется новое приближение к полю перемещений в аксиально подвижном кольце путем решения следующего уравнения:

$$\int_{\Gamma_p} \frac{u_{z,h}^{k+1} - u_{z,h}^k}{\tau_{ax}} v_{z,h} dx + \int_{\Omega_{ax}} \mathbf{v}_h \cdot L_h(T_h^k) \mathbf{u}_h^{k+1} dx = \int_{\Gamma_p} p_h^k v_{z,h} dx + \int_{\Gamma_{ax}} \mathbf{p}_{ext} \cdot \mathbf{v}_h dx, \quad \mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h^{k+1} \in V_h.$$

Здесь $L_h(T_h)$ – оператор линейной теории упругости с учетом температурных деформаций; $\mathbf{u}_h^k = (u_{z,h}^k, u_{r,h}^k)$ – вектор смещений в направлениях z , r , p_h ; \mathbf{p}_{ext} – вектор давлений со стороны смазочного слоя и омывающей кольцо среды, T_h – температура кольца.

Вычисления проводятся до тех пор, пока основные параметры системы не установятся с заданной точностью.

Для решения поставленной задачи описанными выше методами разработан комплекс программ. Проведена серия модельных расчётов при различных геометриях уплотнения, различных параметрах материалов пары трения и газа. Численные эксперименты показали, что использованная математическая модель течения смазки в парах трения верно учитывает основные особенности описываемых физических процессов. Они продемонстрировали также эффективность предлагаемых

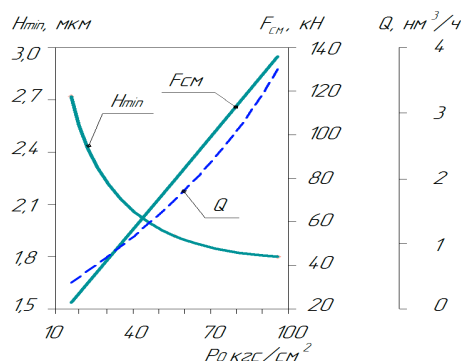


Рис. 3. Графики зависимостей зазора H_{min} , реакции газового слоя F_{cm} и расхода утечки Q от уплотняемого давления P_0

численных методов решения задачи в широком диапазоне изменения параметров. На рис. 2 приведены характерные распределения давления и температуры в смазочном слое уплотнения. Опыт расчетов, выполненных в ЗАО «НИИтурбокомпрессор» (г. Казань), показал, что разработанный авторами комплекс позволяет определять характеристики СГУ в следующем диапазоне изменения режимных параметров работы компрессора: уплотняемые давления до 100 кгс/см^2 , скорости вращения ротора до 20000 об/мин , уплотняемая температура до 473 К .

3. Результаты параметрических исследований

Целями проекторочного расчёта для разработки СГУ являются: 1) определение термоупругих деформаций рабочих поверхностей колец газодинамической пары, определяющих форму уплотнительного зазора; 2) определение зазора между кольцами, от которого зависит расход утечки газа через уплотнение.

Эффективность производственного цикла по изготовлению СГУ определяется возможностью применения уже спроектированных уплотнений для широкого спектра режимных параметров работы центробежного компрессора, которыми являются скорость вращения ротора, уплотняемые давление и температура.

Ниже представлены результаты расчёта СГУ для широкого диапазона изменения уплотняемого давления. В качестве объекта исследования при параметрическом анализе принято уплотнение для компрессора ГПА-16 «Волга» производства ОАО «Казанькомпрессормаш». За номинальный (расчётный) режим работы уплотнения принят режим работы компрессорного агрегата, сжимающего природный газ, с уплотняемым давлением $P_0 = 56 \text{ кгс/см}^2$, температурой газа перед уплотнением $T_0 = 333 \text{ К}$ и скоростью вращения ротора $n = 5600 \text{ об/мин}$.

На рис. 3 представлены зависимости газодинамических характеристик СГУ от величины уплотняемого давления, которые показывают, что с ростом P_0 уменьшается значение минимального зазора между газодинамическими кольцами H_{min} , что вызывает увеличение реакции газового слоя F_{cm} . Расход утечки газа Q через СГУ при этом увеличивается.

На рис. 4 представлены формы уплотнительных зазоров при изменении на $\pm 75\%$ от номинального значения. Из рисунка можно определить, что при изменении уплотняемого давления форма уплотнительного зазора, характеризующаяся отношением значения зазора на входе в газовый слой к минимальному зазору (обозначается как область газодинамических канавок) и отношением зазора на выходе из газового слоя к минимальному зазору (обозначается как область уплотнительного пояса) не изменяется и является конфузорной в области газодинамических

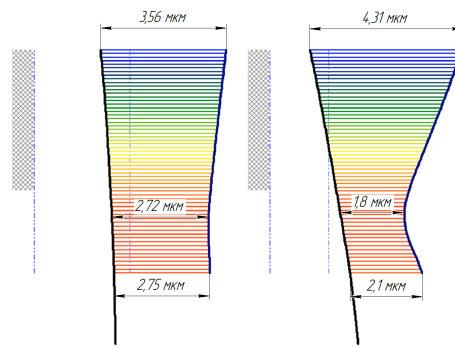


Рис. 4. Изменение формы рабочего зазора при увеличении уплотняемого давления: слева $P_0 = 16 \text{ кгс/см}^2$, справа $P_0 = 96 \text{ кгс/см}^2$

канавок со значениями 1.3 и 2.39 соответственно и диффузорной в области уплотнительного пояса со значениями 1.01 и 1.16 соответственно. Из представленных на рис. 3 и 4 результатов расчётных исследований можно заключить, что спроектированное в соответствии с разработанными рекомендациями [9] СГУ сохраняет форму уплотнительного зазора в широком диапазоне режимных параметров. При этом необходимо обращать внимание на расход утечки газа через уплотнение, который зависит от режима работы компрессорного агрегата. Представленные данные позволяют рекомендовать разработанные типоразмеры СГУ для применения в широком диапазоне режимных параметров работы центробежного компрессора.

Таким образом, в результате представленных исследований разработана модель функционирования СГУ, сконструирован эффективный итерационный алгоритм, проведены параметрические исследования работы СГУ, что позволило рекомендовать разработанный программный комплекс к внедрению в конструкторскую практику по созданию «сухих» газодинамических уплотнений для центробежных компрессорных машин.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №13-01-00908, 12-01-97022, 12-01-97026).

Summary

R.Z. Dautov, M.M. Karchevsky, E.A. Novikov, E.M. Fedotov, V.K. Khaisanov. Mathematical Modeling of Dry Gas Dynamic Seals.

A quasi-three-dimensional thermo-elastic gas dynamic mathematical model of dry gas dynamic seals is developed. A way of its discretization based on finite element method is proposed. An efficient iterative method for solving the corresponding finite-dimensional nonlinear problem is constructed. The results of the parametric calculations, which demonstrate the potential of the developed program complex, are presented.

Keywords: gas dynamic seals, mathematical model, finite element method, iterative methods.

Литература

1. Болдырев Ю.Я., Григорьев Б.С., Лучин Г.А. О расчете сухих газовых торцевых уплотнений со спиральными канавками валов турбокомпрессорных машин // Компрессорная техника и пневматика. – СПб., 1994. – Вып. 4-5. – С. 59-62.

2. *Максимов В.А. и др.* Бесконтактные уплотнения роторов центробежных и винтовых компрессоров. – Казань: ФЭН, 1998. – 291 с.
3. *Ден Г.Н.* Термогазодинамика сухих торцевых газовых уплотнений роторов турбомашин. – Владивосток: Дальрыбытуз, 2003. – 290 с.
4. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука 1987. – 840 с.
5. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз, 1960. – 656 с.
6. *Абрашин В.Н.* Об одном варианте метода переменных направлений решения многомерных задач математической физики. 1 // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 7. – С. 314–323.
7. *Федотов Е.М.* Корректность многокомпонентных двухслойных операторно-разностных схем // Исследования по прикл. математике и информатике. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2001. – Вып. 23. – С. 122–134.
8. *Ляшко А.Д., Федотов Е.М.* Корректность двухслойных многокомпонентных разностных схем для гиперболических уравнений // Изв вузов. Матем. – 2006. – № 9. – С. 50–57.
9. *Новиков Е.А.* Рекомендации для проектирования типоразмерного ряда «сухих» газодинамических уплотнений центробежных компрессоров // Компрессорная техника и пневматика. – 2013. – № 1. – С. 30–33.

Поступила в редакцию
18.03.13

Даутов Рафаил Замилович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Rafail.Dautov@kpfu.ru*

Карчевский Михаил Миронович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Mikhail.Karchevsky@kpfu.ru*

Новиков Евгений Александрович – кандидат технических наук, начальник отдела подшипников и уплотнений, ЗАО «НИИтурбокомпрессор им. В.Б. Шнеппа», г. Казань, Россия.

E-mail: *Novikoveal@rambler.ru*

Федотов Евгений Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *eugeny.fedotov@kpfu.ru*

Хайсанов Владимир Константинович – кандидат технических наук, начальник отделения маслосистем, подшипников и уплотнений, ЗАО «НИИтурбокомпрессор им. В.Б. Шнеппа», г. Казань, Россия.

E-mail: *niitk@kazan.ru*